

Opción A

Ejercicio 1 opción A, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

[2'5 puntos] Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto (0,2) y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es la recta $x + y = 3$.

Solución

Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto (0,2) y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es la recta $x + y = 3$.

Una función polinómica, de grado 3 es de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hay que calcular a , b , c y d .

Sabemos que las funciones polinómicas, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, son continuas y derivables las veces que sean necesarias, en \mathbb{R} .

Como tiene un extremo relativo en el punto (0,2), sabemos que $f'(0) = 0$.

Como pasa por él punto (0, 2) tenemos que $f(0) = 2$.

Sabemos que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es la recta $x + y = 3$, es decir la recta $y = -x + 3$. También sabemos que la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es $f'(1) = y' = -1$ (Número que multiplica a la "x" despejada la "y", o bien directamente su derivada y')

Como hay cuatro incógnitas necesitamos cuatro condiciones, llevamos tres. La cuarta condición sale de saber que la función $f(x)$ y la recta tangente $y = -x + 3$ coinciden en el punto de tangencia, abscisa $x = 1$, por tanto $f(1) = y(1) = -(1) + 3 = 2$.

Tenemos $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y su derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

De $f'(0) = 0$, tenemos $f'(0) = 0 + 0 + c = 0$, por tanto $c = 0$.

De $f'(1) = 0$, tenemos $f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + 0 = -1$, por tanto $3a + 2b = -1$.

De $f(0) = 2$, tenemos $f(0) = 0 + 0 + 0 + d = 2$, de donde $d = 2$.

De $f(1) = 2$, tenemos $f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + 0 + 2 = 2$, por tanto $a + b = 0$. De esta ecuación tenemos $a = -b$, y entrando en la ecuación $3a + 2b = -1$, resulta $3(-b) + 2b = -1 \rightarrow -b = -1 \rightarrow b = 1$, con lo cual $a = -1$.

Los números encontrados son $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$ y $d = 2$.

El polinomio pedido es $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$.

Ejercicio 2 opción A, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^3 \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$ (sugerencia $t = \sqrt[3]{x}$)

Solución

Calculamos primero la integral indefinida $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio } t = \sqrt[3]{x} \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = \int \frac{3t^2 dt}{1 + \sqrt[3]{t^3}} = \int \frac{3t^2 dt}{1 + t} = \int \frac{3t^2 dt}{t + 1} = **$$

Observamos que es una integral racional con el numerador de grado mayor o igual que el denominador, por tanto antes hay que realizar la división entera.

La integral pedida es una integral racional, y como el grado del numerador y el denominador son iguales, efectuamos la división entera antes.

$$\begin{array}{r} 3t^2 \\ -3t^2 - 3t \\ \hline -3t \\ + 3t + 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

Recordamos que $** = \int \left(\text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{divisor}} \right) dx = \int (3t - 3) dt + \int \frac{3t dt}{t+1} = 3 \cdot \frac{t^2}{2} - 3t + 3 \ln|t+1| + K = \left\{ \begin{array}{l} \text{Quitamos} \\ \text{cambio} \end{array} \right\} =$

$$= \frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{x})^2 - 3(\sqrt[3]{x}) + 3 \ln|(\sqrt[3]{x}) + 1| + K$$

Calculamos ya la integral definida: $\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx = \left[\frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{x})^2 - 3(\sqrt[3]{x}) + 3\ln\left|(\sqrt[3]{x})+1\right|+K \right]_0^3 =$
 $= \left(\frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{3})^2 - 3(\sqrt[3]{3}) + 3\ln\left|(\sqrt[3]{3})+1\right|+K \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{0})^2 - 3(\sqrt[3]{0}) + 3\ln\left|(\sqrt[3]{0})+1\right|+K \right) = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{3})^2 - 3(\sqrt[3]{3}) + 3\ln\left|(\sqrt[3]{3})+1\right|$

Ejercicio 3 opción A, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

- a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.
 b) [1 punto] Para $m = 2$, si es posible, resuelve el sistema dado.

Solución

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

- a)
 Discute el sistema según los valores de m.

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ m & 1 & 3 & m \end{pmatrix}$.

Calculamos los rangos de A y de A^* .

En A, $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1+C_2 \\ C_3+C_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+m & m & 2m \\ 1+m & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = -(-1) \cdot (4 \cdot (1+m) - 2m \cdot (1+m)) =$

$= (1+m) \cdot (4-2m)$. (He sacado factor común "1+m")

De $\det(A) = 0 \rightarrow (1+m) \cdot (4-2m) = 0$, de donde $m = -1$ y $4-2m = 0$, de donde $m = 2$.

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$, $\det(A) \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ = número de incógnitas, sistema compatible y determinado, solución única.

Si $m = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas proporcionales, la 1ª y la 3ª, luego $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como **$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, más de una.

Si $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales, la 1ª y la 3ª, luego $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como **$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, más de una.

b)
Para $m = 2$, si es posible, resuelve el sistema dado.

Hemos visto en el apartado (a) que si $m = 2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, *el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones*

Como $\text{rango} = 2$, tomamos dos ecuaciones (1^a y 2^a) y dos incógnitas principales:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad (F_2 - F_1) \approx \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y + z = 0 \end{cases}, \text{ tomando } y = \lambda \in \mathbb{R} \text{ tenemos } z = -3\lambda \quad y \quad x = 1 + y - z =$$

$= 1 + \lambda - (-3\lambda) = 1 + 4\lambda$, y **las infinitas soluciones para $m = 2$ son: $(x, y, z) = (1 + 4\lambda, \lambda, -3\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.**

Ejercicio 4 opción A, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Sea π el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,\lambda)$, siendo λ un número real, y sea r la

recta dada por $r \equiv \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

a) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

b) [1'25 puntos] Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ .

Solución

Sea π el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,\lambda)$, siendo λ un número real, y sea r la

recta dada por $r \equiv \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

a)

Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

Formamos el haz de planos que determina la recta "r" y la imponemos la condición de que pase por el punto A

Haz de planos $\pi_m \equiv (y - z - 3) + m(-x + 2y - 3) = 0$. Como $A(1,0,0) \in \pi_m \rightarrow (0 - 0 - 3) + m(-1 + 0 - 3) = 0$, de donde $-4m = 3$, por tanto $m = -3/4$, y **el plano pedido es $\pi_{-3/4} \equiv (y - z - 3) + (-3/4)(-x + 2y - 3) = 0$** . Operando y quitando denominadores queda **$\pi_{-3/4} \equiv 3x - 2y - 4z - 3 = 0$**

b)

Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ .

El plano π está determinado por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,\lambda)$. Sabemos que para la ecuación de un plano necesitamos un punto, el $A(1,0,0)$ y dos vectores linealmente independientes, el **$\mathbf{AB} = (-1, 1, 0)$** y el **$\mathbf{AC} = (-1, 0, \lambda)$** .

La ecuación general del plano π es: $\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$ Adjuntos
primera
fila

$= (x-1) \cdot (\lambda) - y \cdot (-\lambda-0) + z \cdot (0+1) = \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0$.

La recta $r \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ la podemos considerar como dos planos, luego nos piden estudiar la posición

relativa de los tres planos $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0 \\ y - z - 3 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ según los valores de λ .

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculamos los rangos de A y de A^* .

En A, $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} C_3 + C_2 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1+\lambda \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos
segunda
fila $= +(-1) \cdot (2\lambda + 1 + \lambda) = -3\lambda - 1$.

$\det(A) = |A| = 0 \rightarrow -3\lambda - 1 = 0$, de donde $\lambda = -1/3$.

Si $\lambda \neq -1/3$, $\det(A) \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}$, sistema compatible y determinado, solución única. Los tres planos se cortan en un solo punto, en nuestro caso la recta "r"

corta al plano π en un único punto, que es la solución del sistema

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0 \\ -y - z - 3 = 0, \text{ para} \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

cualquier valor $\lambda \neq 1/3$ real.

Si $\lambda = -1/3$, $A = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-1/3) \cdot (-4+9) \neq 0$, luego $\text{rango}(A^*)=3$.

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, el sistema es incompatible y no tiene solución. Por tanto la recta "r" es paralela al plano π y no está contenida en él.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Considera la función definida por $f(x) = -x + \frac{4}{x^2}$ para $x \neq 0$.

- [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
- [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución

Considera la función definida por $f(x) = -x + \frac{4}{x^2} = \frac{-x^3 + 4}{x^2}$ para $x \neq 0$.

a)

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

$x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f (A.V.) si $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 4}{x^2} = [4/0^+] = +\infty$; la recta $x = 0$ es una A.V. de f(x).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3 + 4}{x^2} = [+0^+] = +\infty$$

Como en la función que me han dado, el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador, f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma $y = mx + n$ con $m = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)/x]$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$.

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.

Lo vamos a realizar por división

$-x^3 + 4$	x^2
$+x^3$	$-x$
$0 + 4$	

La A.O. de f(x) es $y = -x$ en $\pm \infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en $+\infty$ (le damos a x el valor + 100)

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en $-\infty$ (le damos a x el valor - 100)

Si hay es este caso A.O no hay asíntotas horizontales (A.H.)

b)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{-x^3 + 4}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 \cdot x^2 - (-x^3 + 4) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-3x^4 + 2x^4 - 8x}{(x^2)^2} = \frac{-x^4 - 8x}{(x^2)^2} = \frac{x \cdot (-x^3 - 8)}{(x^2)^2}$$

Si $f'(x) = 0$; $x \cdot (-x^3 - 8) = 0$, de donde $x = 0$ (**no sirve, porque $x = 0$ es A.V.**) y $-x^3 - 8 = 0$, de donde tenemos $x^3 = -8 \rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$, que será un posible extremo relativo.

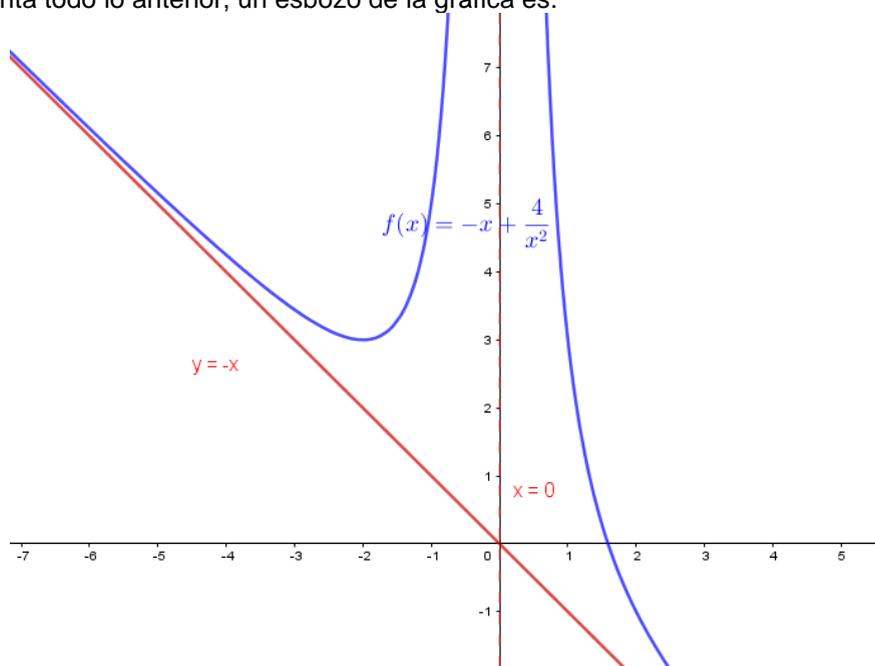
Como $f'(-3) = -57/(+) < 0$, $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-\infty, -2)$.

Como $f'(-1) = 7/(+) > 0$, $f'(x) > 0$ en $(-2, 0)$, luego $f(x)$ es estrictamente creciente (\nearrow) en $(-2, 0)$.

Como $f'(1) = -9/(+) < 0$, $f'(x) < 0$ en $(0, +\infty)$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $(0, +\infty)$.

Por definición en $x = -2$ hay un mínimo relativo que vale $f(-2) = \frac{-(-2)^3 + 4}{(-2)^2} = 3$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, un esbozo de la gráfica es:



Ejercicio 2 opción B, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

[2,5 puntos] Calcula $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} dx$

Solución

Calculamos primero la integral indefinida

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} \cdot dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1} \cdot dx$$

Es un integral racional, y como el numerador es de grado mayor o igual que el denominador tengo que realizar la división entera primero:

$$\begin{array}{r} x^2 \quad +1 \quad | \quad x^2 + 2x + 1 \\ -x^2 - 2x - 1 \quad | \quad 1 \\ \hline -2x \end{array}$$

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} dx = \int (\text{Cociente}) dx + \int \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}} dx = \int (1) dx + \int \frac{-2x}{(x + 1)^2} dx = x + I_1$$

$$I_1 = \int \frac{-2x}{(x + 1)^2} \cdot dx = \{\text{Raiz doble } (-1)\} = \int \frac{A}{x + 1} dx + \int \frac{B}{(x + 1)^2} dx = A \cdot \ln|x + 1| - \frac{B}{x + 1} = \{++\} = -2 \cdot \ln|x + 1| - \frac{2}{x + 1}$$

{++} Calculamos A y B

$$\frac{-2x}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} = \frac{A(x + 1) + B}{(x + 1)^2}$$

Igualando numeradores:

$-2x = A(x+1) + B$. Sustituimos "x" por el valor de las raíces del denominador, y le damos otro valor.

Para $x = -1$, tenemos $2 = B$, de donde $B = 2$.

Tomo $x = 0$, tenemos $0 = A(1) + 2$, de donde $A = -2$.

Luego la integral indefinida es $I = \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} dx = x + I_1 = x - 2 \cdot \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + K$.

La integral definida pedida es $\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2} dx = \left[x - 2 \cdot \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + K \right]_0^1 =$
 $= \left((1) - 2 \cdot \ln|(1)+1| - \frac{2}{(1)+1} + K \right) - \left(0 - 2 \cdot \ln|0+1| - \frac{2}{0+1} + K \right) = -2 \cdot \ln(2) + 2 \cong \mathbf{0'6137}$

Ejercicio 3 opción B, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.

b) [1,5 puntos] Para $m = 1$, calcula, si existe, la matriz X que verifica la igualdad $A^{-1}XA + I = B$, siendo I la matriz identidad.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a)

Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.

La matriz A no tiene inversa si su determinante $\det(A) = |A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = 1((m-1) \cdot (2-m) - (-1) \cdot (2-m)) = (2-m) \cdot (m-1+1) = m \cdot (2-m).$$

Si $|A| = 0$, tenemos $m \cdot (2-m) = 0$, de donde $m = 0$ y $m = 2$, por tanto **para $m = 0$ y $m = 2$ no existe matriz inversa de A.**

b)

Para $m = 1$, calcula, si existe, la matriz X que verifica la igualdad $A^{-1}XA + I = B$, siendo I la matriz identidad. Hemos visto que para $m = 1$ existe A^{-1} , no existía para $m = 0$ y $m = 2$.

De $A^{-1}XA + I = B$, tenemos $A^{-1}XA = B - I = C$.

Multiplicando la expresión $A^{-1}XA = C$ por la izquierda por la matriz A y por la derecha por la matriz A-1, tenemos: $AA^{-1}XAA^{-1} = ACA^{-1} \rightarrow I \cdot X \cdot I = ACA^{-1} \rightarrow \mathbf{X = ACA^{-1}}$

Realizamos ya los cálculos:

Para $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = B - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = C$.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = 1(0 + 1) = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$.

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$. $|A| = 1$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{La matriz pedida es } \mathbf{X} = \mathbf{ACA}^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4 opción B, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Considera el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\mathbf{u} = (1,2,1)$ y el plano π de ecuación $y = 0$.

a) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta que pasa por P , está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a \mathbf{u} .

b) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P , es perpendicular a π y del que \mathbf{u} es un vector director.

Solución

Considera el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\mathbf{u} = (1,2,1)$ y el plano π de ecuación $y = 0$.

a)

Halla la ecuación de la recta "r" que pasa por P , está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a \mathbf{u} .

Para una recta "r" necesitamos un punto, el $P(-1,0,1)$ y un vector director el $\mathbf{w} = (a,b,c)$.

La ecuación de la recta en paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + a \cdot \lambda \\ y = 0 + b \cdot \lambda \\ z = 1 + c \cdot \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vamos a calcular el vector $\mathbf{w} = (a,b,c)$.

Me dicen que la recta "r" está contenida en el plano $\pi \equiv y = 0$, sustituyendo la recta en el plano tenemos por un lado $b \cdot \lambda = 0$, y por otro lado el vector \mathbf{w} de la recta es normal al vector normal del plano $\mathbf{n} = (0,1,0)$, es decir su producto escalar (\bullet) es cero $\rightarrow \mathbf{w} \bullet \mathbf{n} = 0 = (a,b,c) \bullet (0,1,0) = b$, de donde $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Por otro lado el vector \mathbf{w} de la recta es perpendicular a $\mathbf{u} = (1,2,1)$, luego $\mathbf{w} \bullet \mathbf{u} = 0 = (a,0,c) \bullet (1,2,1) = a + c$, es decir $\mathbf{a} = -\mathbf{c}$.

El vector \mathbf{w} de la recta buscado es $\mathbf{w} = (a,b,c) = (-c,0,c)$, como hay infinitos vectores tomamos sólo uno de

ellos, tomando $c = 1$, por tanto $\mathbf{w} = (-1,0,1)$, y **la recta pedida es** $r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

b)

Determina la ecuación del plano π_1 que pasa por P , es perpendicular a π y del que \mathbf{u} es un vector director.

Para un plano π_1 necesitamos un punto, el $P(-1,0,1)$, y dos vectores independientes, uno el $\mathbf{n} = (0,1,0)$, puesto que el plano π_1 es perpendicular al π , y el otro vector es el $\mathbf{u} = (1,2,1)$, nos lo dice el problema.

La ecuación paramétrica del plano es el conjunto de puntos $X(x,y,z)$ del espacio que verifican:

$$\pi_1 \equiv (x,y,z) = (-1,0,1) + \lambda \cdot (0,1,0) + \mu \cdot (1,2,1) \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(La ecuación general sería $\pi_1 \equiv \det(PX, \mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0 = x - z + 2 = 0$.)